Zestaw wybranych wzorów matematycznych

---

matematyka elementarna

pochodne

całki

geometria analityczna w 3D

elementy trygonometrii sferycznej

Piotr Choczyński

p.j.choczynski@wp.pl

www.e-korepetycje.net/pjchocz

19.02.2017 v2.1

Spis treści

1 Matematyka Elementarna

1.1 Wzory skróconego mnożenia

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

1.2 Prawa działań na potęgach i pierwiastkach

Dla dowolnych $m, n \in R$ i $a, b > 0$:

$$a^0 = 1 \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \cdot b)^m = a^m \cdot a^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

1.3 Prawa działań na logarytmach

Dla dowolnych $c > 0$, $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$: $\log_a c = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = c$ (definicja logarytmu)

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \qquad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Można stosować uproszczone formy zapisu: $\log_e x \equiv \ln x$; $\log_{10} x \equiv \log x \equiv \lg x$

1.4 Trygonometria

Wzory podstawowe: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Wzory redukcyjne:

$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$
$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$
$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nie istnieje

2 Pochodne

2.1 Podstawowe informacje

- Definicja
  Granica ilorazu różnicowego przy $\Delta x \to 0$:

  $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Interpretacja geometryczna pochodnej
  Tangens nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0:

  $$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Interpretacja fizyczna pochodnej oraz drugiej pochodnej (po czasie):

  $$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

  $$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0:

  $$y = ax + b, \quad \text{gdzie :} \qquad a = f'(x_0), \qquad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

2.2 Pochodne funkcji elementarnych

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

2.3 Własności

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\Big[f\big[g(x)\big]\Big]' = f'\big[g(x)\big] \cdot g'(x)$$

3 Całki

3.1 Wzory podstawowe

$$\int 0 \cdot dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

3.2 Wzory uogólnione

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \cos ax\,dx = \tfrac{1}{a}\sin ax + C$$

$$\int \sin ax\,dx = -\tfrac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

wzór na całkowanie przez części:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \begin{Vmatrix} u(x) & v'(x) \\ u'(x) & v(x) \end{Vmatrix} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

3.3 Całki funkcji wymiernych

Wszystkie całki postaci $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$, gdzie $P_n(x)$ to wielomian n-tego stopnia, a $Q_m(x)$ to wielomian m-tego stopnia możemy podzielić na następujące przypadki:

1. $\boxed{\mathbf{n \geqslant m}}$

   Poprzez dzielenie wielomianu doprowadzamy wyrażenie podcałkowe do postaci:

   $$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{S_k(x)}{Q_m(x)},\ \text{gdzie } k < m$$

   Wyrażenie $R_{n-m}(x)$ rozwiązujemy standardowym wzorem na całkę z wielomianu, natomiast $\frac{S_k(x)}{Q_m(x)}$ za pomocą metody z punktu 2.

2. $\boxed{\mathbf{n < m}}$

   Doprowadzamy mianownik do postaci iloczynowej (czynników stopnia co najwyżej drugiego) i przedstawiamy go w postaci ułamków prostych:

   $$\frac{A}{(x+a)^k},\ \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^l}, \qquad l,n \in N$$

   Na przykład:

   $$\int \frac{1}{x^2(x^2-1)(x^2-x+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1}\right) dx$$

   Poszczególne elementy występujące w powyższej całce rozwiązujemy jedną z poniższych metod (gdzie m to stopień wielomianu z mianownika, a n to stopień wielomianu z licznika):

   (a) $\boxed{(\mathbf{m=1})}$

   Stosujemy wzór:

   $$\int \frac{1}{x \pm p}\,dx = \ln|x \pm p| + C$$

   (b) $\boxed{(\mathbf{m \geqslant 2})\ \wedge\ (\mathbf{n=0})}$

   Podstawiamy pod t wyrażenie stojące pod potęgą i korzystamy ze wzoru:

   $$\int t^n\,dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

   (c) $\boxed{(\mathbf{m=2})\ \wedge\ (\boldsymbol{\Delta} < \mathbf{0})\ \wedge\ (\mathbf{n=0})}$

   Doprowadzamy mianownik do postaci $(x-p)^2+q$ i po podstawieniu $t = x - p$ oraz $q = a^2$ korzystamy ze wzoru:

   $$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C$$

   (d) $\boxed{(\mathbf{m=2})\ \wedge\ (\mathbf{n=1})}$

   Doprowadzamy licznik do postaci pochodnej mianownika i stosujemy wzory:

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C$$

3.4 Całki funkcji niewymiernych

Do całek postaci:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \qquad ad - bc \neq 0$$

Stosujemy podstawienie typu:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt$$

3.5 Całki funkcji trygonometrycznych

1. Całki typu $\int R(\sin ax, \cos bx)\,dx$, rozwiązujemy, stosując jeden z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta =& \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\beta-\alpha)}{2} \\
\sin\alpha\cos\beta =& \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2} \\
\cos\alpha\cos\beta =& \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}
\end{aligned}$$

2. Całki typu $\int R(\sin^m x, \cos^n x)\,dx$ rozwiązujemy stosując jedną z poniższych metod:

   (a) Podstawienie, gdy funkcja jest nieparzysta względem $\sin x$: $t = \cos x$

   (b) Podstawienie, gdy funkcja jest nieparzysta względem $\cos x$: $t = \sin x$

   - Przykład:

$$\int \sin^n x\cos^{2k+1}x\,dx = \int \sin^n x\cos^{2k}x\cos x\,dx = \int \sin^n x(1 - sin^2 x)^k\,d(\sin x)$$

   (c) Podstawienie, gdy funkcja jest parzysta wzgledem $\sin x$, $\cos x$:

   - Stosujemy podstawienie:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

   - lub przekształcamy funkcję podcałkową jednym z poniższych wzorów:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

   (d) Podstawienie, gdy funkcja nie spełnia warunków (a)-(c) (tzw. podstawienie uniwersalne):

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

3.6 Zastosowania w geometrii

1. Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji dookoła osi OX:

   - Funkcja dana jawnie $y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$

   $$V = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\, dx$$

   - Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$

   $$V = \pi \int\limits_\alpha^\beta y^2(t)|x'(t)|\, dt$$

2. Pole powierzchni bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji dookoła osi OX:

   - Funkcja dana jawnie $y = y(x) \geqslant 0, \quad a \leqslant x \leqslant b$

   $$S = 2\pi \int\limits_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

   - Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$

   $$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

3. Długość łuku funkcji:

   - Funkcja dana jawnie $y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$

   $$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

   - Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta$

   $$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

4 Geometria Analityczna w 3D

4.1 Wektory

- Iloczyn skalarny: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$

- Iloczyn wektorowy: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$

  W wyniku obliczenia iloczynu wektorowego otrzymujemy trzeci wektor $\vec{c}$, który jest prostopadły do obydwu wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$.

- Iloczyn mieszany: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

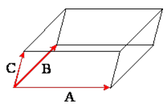
- Prostopadłość (ortogonalność) wektorów: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Równoległość (kolinearność) wektorów: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

- Pole równoległoboku zbudowanego na dwóch wektorach: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

- Pole trójkąta zbudowanego na dwóch wektorach: $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

- Objętość równoległościanu zbudowanego na trzech wektorach: $V = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$



- Objętość czworościanu zbudowanego na trzech wektorach: $V = \dfrac{1}{6}|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$

- Rzut wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$: $\vec{a}_b = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

4.2 Teoria pola

- Gradient pola skalarnego f: $\nabla f(x, y, z) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right]$

- Dywergencja pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$: $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$

- Rotacja pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$: $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

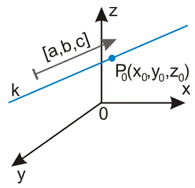
- Pochodna kierunkowa: $\nabla_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$

4.3 Proste

- Równanie kierunkowe: $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z-z_o}{c}$, gdy $abc\neq 0$

  lub $\begin{cases} x=x_o \\ \frac{y-y_o}{b}=\frac{z-z_o}{c} \end{cases}$ gdy $a=0\wedge bc\neq 0$ oraz analogicznie dla pozostałych.

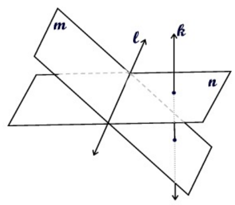
- Równanie parametryczne: $\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \\ z=z_o+ct \end{cases}$



  Prosta wychodząca z punktu $P_o=(x_o,y_o,z_o)$ przeciągnięta przez wektor $\vec{v}=[a,b,c]$

- Równanie krawędziowe (przecięcie dwóch płaszczyzn nierównoległych)

$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



- Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B: $\dfrac{x-x_A}{x_A-x_B}=\dfrac{y-y_A}{y_A-y_B}=\dfrac{z-z_A}{z_A-z_B}$

- Wzajemne położenie prostych

  - Prostopadłość: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$
  - Równoległość: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$
  - Przecinanie się: $\overrightarrow{P_{01}P_{02}}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ są liniowo zależne i nie spełniają warunku równoległości.
  - Skośność (proste nie leżą w jednej płaszczyźnie): $\overrightarrow{P_{01}P_{02}}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ są liniowo niezależne.

4.4 Płaszczyzny

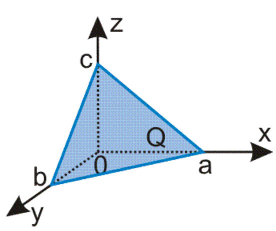
- Równanie ogólne płaszczyzny: $Ax+By+Cz+D=0$

  Wektor prostopadły do płaszczyzny $\vec{R}=[A,B,C]$

  Prostopadłość/równoległość płaszczyzn określa się przy pomocy prostopadłości/równoległości ich wektorów normalnych:

  - Prostopadłość płaszczyzn: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
  - Równoległość płaszczyzn: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

- Równanie odcinkowe płaszczyzny: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$



- Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty niewspółliniowe:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Odległość punktu od płaszczyzny: $d = \dfrac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

- Kąt między płaszczyznami (kąt między wektorami normalnymi do płaszczyzn):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{R_1}\cdot\vec{R_2}}{|\vec{R_1}||\vec{R_2}|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

- Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $F(x,y,z)$ w punkcie $P_o(x_o,y_o,z_o)$:

$$F_x(P_o)(x-x_o)+F_y(P_o)(y-y_o)+F_z(P_o)(z-z_o)=0$$

4.5 Proste i płaszczyzny

- Prostopadłość/równoległość prostej i płaszczyzny:

$$l: \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}, \qquad \alpha : Ax+By+Cz+D=0$$

  Wektor $\vec{u}(a,b,c)$ jest równoległy do prostej l
  Wektor $\vec{R}(A,B,C)$ jest prostopadły do płaszczyzny α

  - Warunek prostopadłości:

  $$l \perp \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

  - Warunek równoległości:

  $$l \parallel \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad Aa+Bb+Cc=0$$

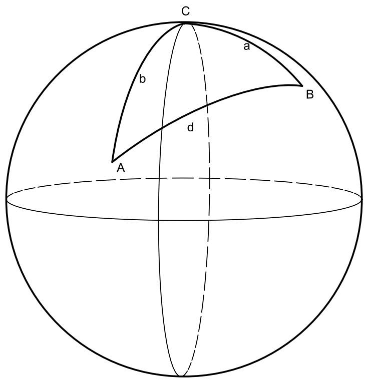
- Punkt przebicia prostej z płaszczyzną
  Wyznaczamy parametr t podstawiając l do α: $A(x_o+at)+B(y_o+bt)+C(z_o+ct)+D=0$
  Współrzędne punktu przebicia otrzymamy podstawiając parametr t do równania prostej l.

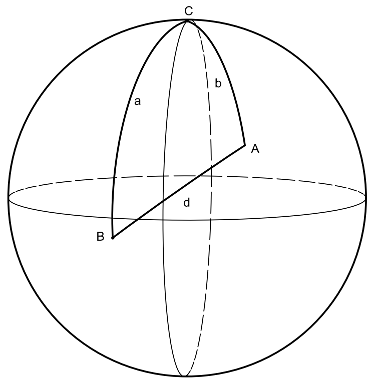
- Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny: $\sin\varphi = \dfrac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

5 Elementy Trygonometrii Sferycznej

5.1 Podstawowe informacje

- Trygonometria sferyczna zajmuje się związkami w trójkątach na powierzchni kuli, czyli tzw. trójkątach sferycznych. Trójkąt sferyczny jest figurą, której bokami są łuki kół wielkich przechodzące przez każdą z par spośród trzech punktów będących jego wierzchołkami. Poniżej znajdują się dwa przykładowe trójkąty sferyczne.





- W trójkącie sferycznym miarą zarówno kątów A, B, C jak i boków a, b, d są stopnie. Jego boki są łukami wyrażonymi w mierze swoich kątów środkowych.

- Podstawowe własności trójkątów sferycznych:
  - Każdy element trójkąta sferycznego jest mniejszy od 180°,
  - $0° < a + b + c < 180°, \qquad 180° < A + B + C < 540°,$
  - Naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt.

- W celach nawigacyjnych rozważane trójkąty sferyczne będą posiadały jeden wierzchołek (C) na biegunie północnym. Boki a, b leżą na południkach przechodzących odpowiednio przez punkty B, A.

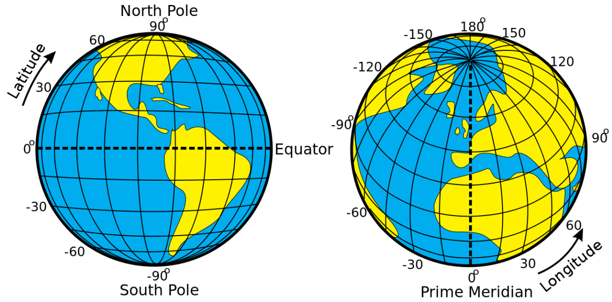
- Ortodroma jest krótszym łukiem koła wielkiego przechodzącego przez dwa punkty na sferze i wyznacza najkrótszą drogę między nimi (tzw. odległość ortodromiczną między punktami A i B oznaczoną jako d). Jest ona zawsze wygięta w kierunku bliższego bieguna.

- Kąty drogi są mierzone zawsze względem ruchu wskazówek zegara, między południkiem przechodzącym przez dany punkt a dodatnim kierunkiem ruchu. Szczegółowo jest to zobrazowane na rysunkach na stronie 15. Są na nich zaznaczone wszystkie elementy zarówno trójkąta sferycznego jak i samej ortodromy, które musimy wyznaczyć.

- Aby poruszać się po ortodromie, kąt drogi musi być cały czas zmieniany (poza przypadkiem poruszania się po równiku - wtedy kąt drogi wynosi stale 90° lub 270°, lub po dowolnym południku - wtedy kąt drogi wynosi stale 0° lub 180°).

- Wierzchołki ortodromy to dwa punkty W_1 oraz W_2 leżące na kole wielkim zawierającym daną ortodromę, wysunięte najbardziej na północ oraz najbardziej na południe.

- współrzędne geograficzne składają się z szerokości geograficznej (N,S) podawanej w zakresie $[-90°; 90°]$. (jako odchylenie na północ lub południe od równika) oraz z długości geograficznej (E,W) podawanej w zakresie $[-180°; 180°]$ (jako odchylenie na wschód lub zachód od południka zerowego).



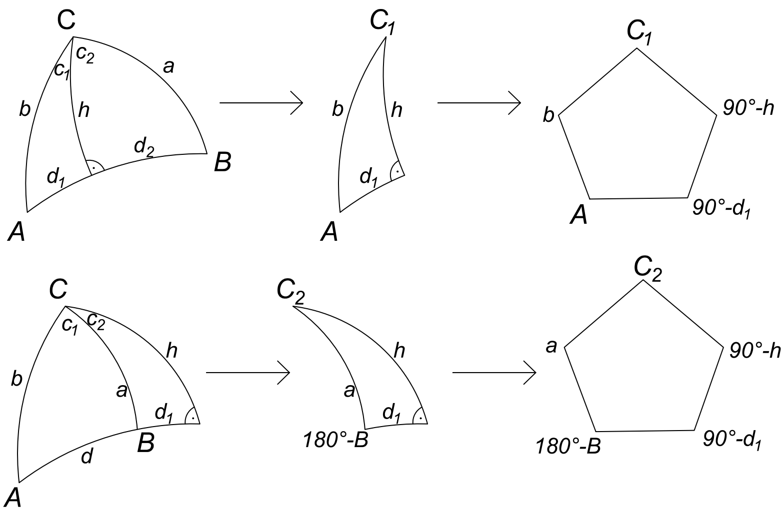
5.2 Twierdzenie cosinusów (dla boków)

- W dowolnym trójkącie sferycznym $ABCabd$ możemy zdefiniować następujące wzory:

$$\cos a = \cos b \cos d + \sin b \sin d \cos A$$
$$\cos b = \cos a \cos d + \sin a \sin d \cos B$$
$$\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

5.3 Reguła Nepera

- W celu znalezienia wysokości trójkąta sferycznego oraz miary kąta przylegającego do niej można skorzystać z tzw. reguły Nepera. Poniżej znajdują się przykładowe rysunki dla przypadków kiedy wysokość trójkąta znajduje się wewnątrz trójkąta oraz poza nim.



- Jeśli rozmieścimy pięć elementów prostokątnego trójkąta sferycznego na pięciokącie (pomijając kąt prosty) w takiej kolejności, w jakiej występują w trójkącie i zastąpimy przy tym przyprostokątne ich dopełnieniami do 90°, to:
  - cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi cotangensów dwóch przylegających do niego elementów,
  - cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi sinusów dwóch nieprzylegających do niego elementów.

  W szczególności (na podstawie górnego rysunku):

$$\cos(90^\circ - h) = \sin b \cdot \sin A \quad \Rightarrow \quad \sin h = \sin b \cdot \sin A$$
$$\cos b = \operatorname{ctg} C_1 \cdot \operatorname{ctg} A \quad \Rightarrow \quad \cos b = \frac{1}{\operatorname{tg} C_1 \cdot \operatorname{tg} A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} C_1 = \frac{1}{\cos b \cdot \operatorname{tg} A}$$

- Do rozwiązania powyższych równań zastosowano m.in. wzór $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ oraz wzory redukcyjne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

5.4 Algorytm rozwiązania zadania metodą klasyczną

- Na wejściu otrzymujemy współrzędne geograficzne dwóch punktów (początkowego i końcowego). Przykładowo:

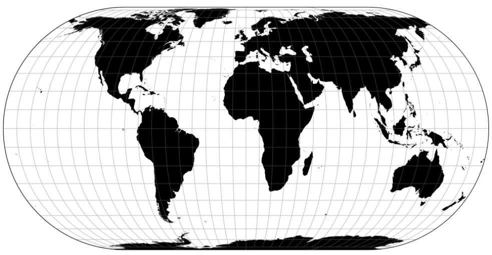
  $A(52^\circ 46' \mathrm{S}; 73^\circ 24' \mathrm{W})$; $B(34^\circ 54' \mathrm{S}; 95^\circ 00' \mathrm{E})$

  Celem zadania jest wyznaczenie odległości ortodromicznej (d) pomiędzy nimi, początkowego kąta drogi (α), końcowego kąta drogi (β) oraz współrzędnych wierzchołków ortodromy W_1 i W_2.

ETAPY ROZWIĄZANIA:

1. Zamieniamy współrzędne geograficzne obu punktów na wartości liczbowe szerokości (φ) oraz długości geograficznych (λ) korzystając z przyjętej konwencji znaków: (+) dla NE, (-) dla SW.

2. Rysujemy rzut równikowy (jest on przedstawiony na 15. stronie) i zaznaczamy długości geograficzne obu punktów (w celu sprawdzenia w którą stronę będzie krótsza droga: $W \to E$ czy $E \to W$). Kierunek drogi łatwo jest również ustalić na podstawie płaskiego odwzorowania Ziemi. Droga na wschód zawsze będzie na nim odwzorowana jako droga w prawo.
UWAGA: Nawet płynąc w prawo ze wschodniej półkuli na zachodnią (przecinając południk 180°) jest to traktowane jako droga z zachodu na wschód. Analogicznie jest dla przeciwnego kierunku.



3. Wyznaczamy a, b, C (przyjmujemy $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$):

$$a = 90^\circ - \varphi_B \qquad b = 90^\circ - \varphi_A$$

$$C = \begin{cases} |\Delta\lambda| & \text{gdy} |\Delta\lambda| \leqslant 180^\circ \\ 360^\circ - |\Delta\lambda| & \text{gdy} |\Delta\lambda| > 180^\circ \end{cases}$$

4. Wyznaczamy odległość ortodromiczną z twierdzenia cosinusów (5.2). Aby wyznaczyć ją w milach morskich (Mm) mnożymy otrzymany w stopniach wynik przez 60.

5. Wyznaczamy miary kątów A, B - z twierdzenia cosinusów (5.2), po wyznaczeniu z odpowiednich równań cosinusów kątów:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos d}{\sin b \sin d} \qquad \cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos d}{\sin a \sin d}$$

6. Obliczamy początkowy oraz końcowy kąt drogi:

$$W \to E : \begin{cases} \alpha = A \\ \beta = 180^\circ - B \end{cases} \qquad E \to W : \begin{cases} \alpha = 360^\circ - A \\ \beta = 180^\circ + B \end{cases}$$

7. Wprowadzamy do naszego trójkąta $ABCabd$ wysokość h wychodzącą z wierzchołka C i obliczamy wartości C_1 (lub C_2) oraz h korzystając z reguły Nepera (5.3). Jeżeli kąty A, B są jednorodne (oba rozwarte lub oba ostre) to wysokość h będzie leżała wewnątrz trójkąta, a jeżeli są niejednorodne to wysokość będzie leżała na zewnątrz, po stronie kąta rozwartego. Wysokość h przecina koło wielkie naszej ortodromy w punkcie będącym jej wierzchołkiem W_1.
UWAGA: Przy wyznaczaniu dowolnej wielkości z funkcji $\sin h$ otrzymujemy dwa możliwe rozwiązania: (h) oraz ($180^\circ - h$). Na podstawie własności trójkąta sferycznego wybieramy jedyne właściwe rozwiązanie. Często wystarczy zauważenie na podstawie rysunku, czy wysokość powinna być większa czy mniejsza niż 90° (czyli na której półkuli spodziewamy się wierzchołka W_1).

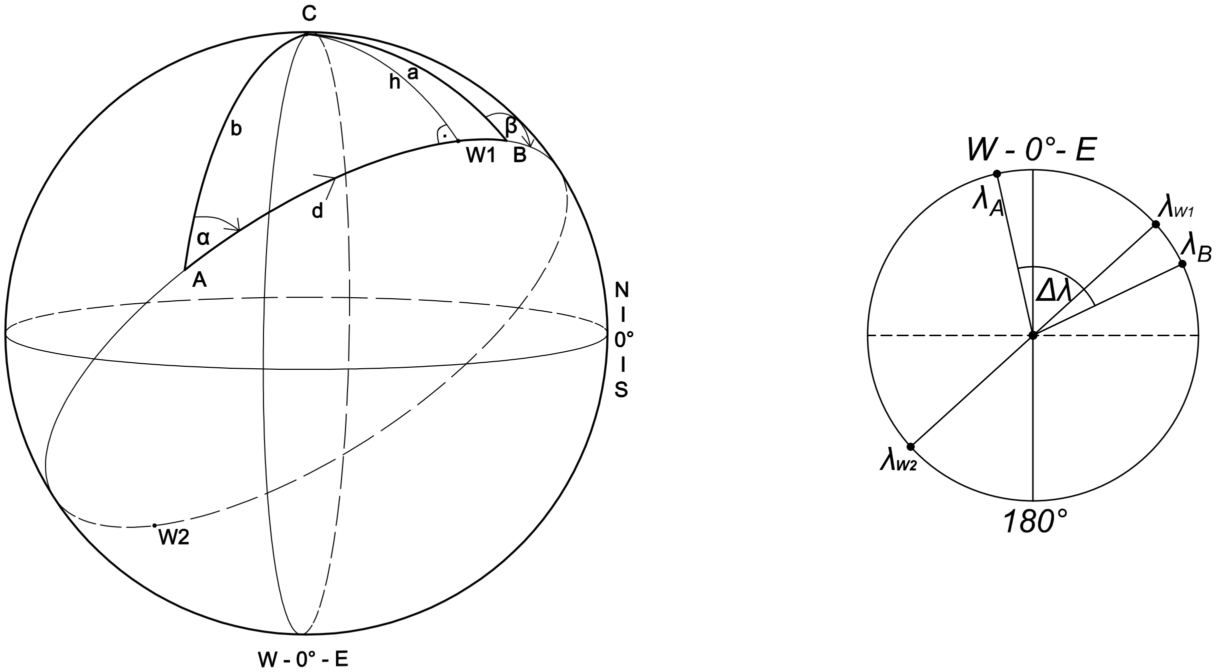
8. Obliczamy wierzchołki ortodromy wykorzystując podane wzory, a następnie zaznaczamy długości λ_{W_1} oraz λ_{W_2} na rzucie równikowym (rysunek na stronie obok):

$$W_1 = \begin{cases} \varphi_{W_1} = 90^\circ - h \\ \lambda_{W_1} = \lambda_A \pm C_1 \quad \vee \quad \lambda_B \pm C_2 \end{cases} * \qquad W_2 = \begin{cases} \varphi_{W_2} = -\varphi_{W_1} \\ \lambda_{W_2} = \lambda_{W_1} \pm 180^\circ \end{cases} **$$

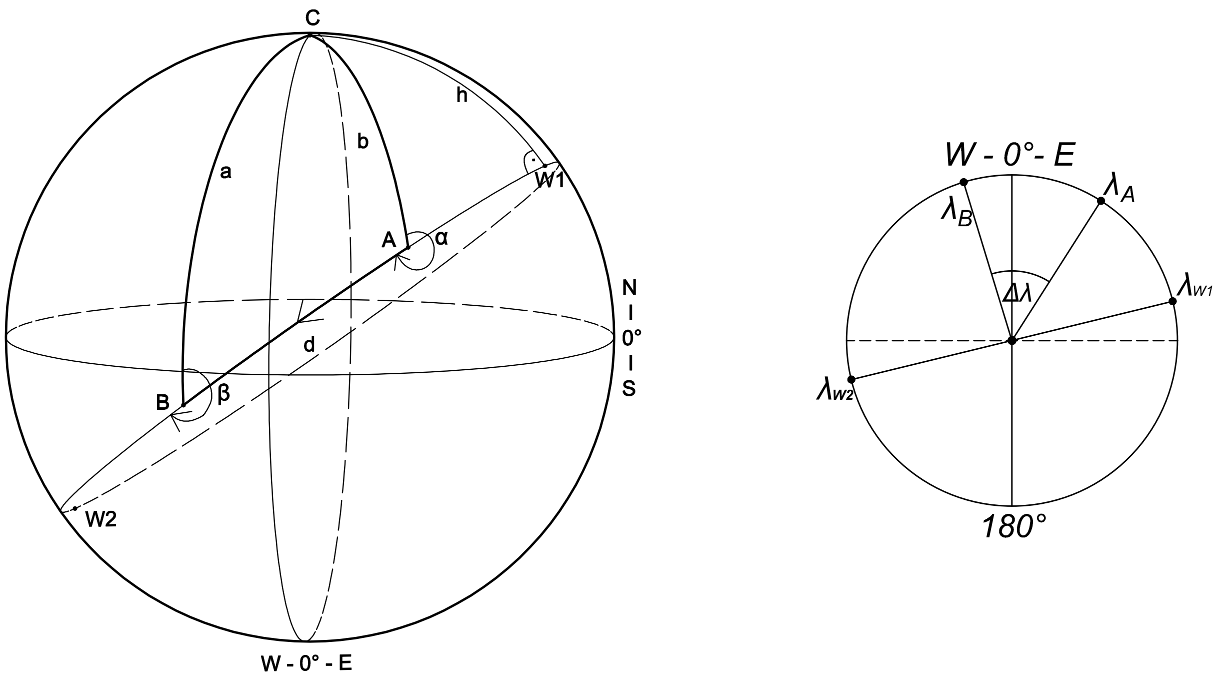
* Prawidłową zależność wybieramy na podstawie rysunku, biorąc pod uwagę odchylenie wysokości (o kąt C_1 lub C_2) od odpowiedniego południka (biegnącego do punktu A lub B).

** Tak, aby $\lambda_{W_2} \in [-180^\circ, 180^\circ]$ - czyli aby miała sens długości geograficznej.

5.5 Rysunki szczegółowe



Rysunek 2: Kompletny rysunek przy kursie W⟶E wraz z rzutem równikowym



Rysunek 3: Kompletny rysunek przy kursie E⟶W wraz z rzutem równikowym